



Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Física

Trabalho de Conclusão de Curso Bacharelado em
Física

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Acadêmico: Pedro Henrique Librelato Böhm

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Hatsumi Mukai

Maringá, 23 de janeiro de 2025

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Pedro Henrique Librelato Böhm

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

Aprovado pela Banca Avaliadora:

Prof^ª. Dr^ª. Hatsumi Mukai (Orientadora - DFI/UEM)

Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira (DFI/UEM)

Prof. Dr. Paulo Ricardo Garcia Fernandes (DFI/UEM)

Maringá, 23 de janeiro de 2025

“Always believing that one day I would be flying freely, I always stood by the window, looking up at the deep sky. That one day, wings would sprout from this world. And wings would sprout from this back. And I will smile like Nee-san with that boy. This is what the little girl, so long ago, dreamed of-”

Kinoko Nasu, *Tsukihime*.

Resumo

A Teoria da Relatividade Geral, com seus conceitos “fora da curva” e paradoxos de difícil compreensão, fascina estudantes e curiosos em geral, sobretudo com o advento de plataformas de rede sociais, como o *Youtube*, que facilitam a divulgação científica. Nomes como Albert Einstein [1], Stephen Hawking [2] e Neil deGrasse Tyson [3] se tornaram cada vez mais familiares, sempre ligados a mistérios do nosso Universo. Em 2015, o anúncio da primeira detecção bem sucedida de ondas gravitacionais impulsionou ainda mais esse interesse. Essas, que são perturbações no tecido do espaço-tempo causadas por corpos amplamente massivos e eventos cataclísmicos, foram escolhidas como tópico principal desta monografia. Nela, apresentamos a Teoria da Relatividade Geral, com seu contexto histórico, e seus fundamentos por trás da complexa álgebra tensorial. O estudo das ondas gravitacionais vêm a tona pela aproximação de campo gravitacionais fracos, focando em como ocorrem e seus graus de polarização. Para concluir, também discutimos um pouco sobre os seus principais métodos de detecção, nos quais a ciência atual tanto investe, e como cientistas brasileiros estão envolvidos nesse trabalho.

Palavras-chave: teoria da relatividade geral, espaço-tempo, detecção de ondas gravitacionais;

Abstract

The General Relativity Theory, with its “outside the curve” concepts and incomprehensible paradoxes, fascinates physics students and curious people in general, especially with the increasing use of social media, such as Youtube, which facilitates the scientific dissemination. Names like Albert Einstein [1], Stephen Hawking [2] and Neil deGrasse Tyson [3] have become more familiar, always related to the Universe’s greatest mysteries. In 2015, the announcement of the first successful gravitational wave detection further boosted this interest. These phenomena, known by distorting space-time and caused by overmassive bodies and cataclysmical events, were chosen as the main subject of this monography. In it, we present the General Relativity, with its historical context, and all its subjects behind the complex tensorial algebra. Gravitational Wave study comes up by the weak gravitation field approximation, focusing on how they occur and their polarization. To sum up, we also discuss about gravitational wave’s main detection methods, the investment made by current science, and how brazilian scientists take part in such work.

KeyWords: general relativity theory, space-time, gravitational wave detection;

Agradecimentos

À Deus, pela minha vida, família, e a chance de estudar o que eu tanto amo.

À Professora Hatsumi, pela paciência, disponibilidade, e parceria. Muito obrigado por aceitar me orientar sem nem mesmo me conhecer.

À minha mãe, Gecimara. Mulher da minha vida, minha eterna companheira, que lutou com unhas e dentes contra o mundo para eu ser feliz. Estar ao seu lado dá sentido para minha vida, e nunca vou descansar até retribuir tudo o que você fez por mim.

Ao meu pai de coração, Fabiano. Meu maior exemplo e ídolo. Obrigado por não poupar esforços para eu que tivesse sempre do bom e do melhor em tudo, e por me dar uma família que me ama tanto sem precisar de nenhum laço sanguíneo. Meu sonho é ser um dia pelo menos metade do homem que você é.

Ao meu pai, Otto. Meu parceiro de longa data, que mesmo longe, sempre fez questão de participar e fazer parte da minha vida. De longe a pessoa que mais me incentivou a fazer física e buscar o que eu sonhava. Obrigado por me mostrar a força que eu tenho para sempre seguir em frente, e mostrar que sempre devo buscar ser a minha melhor versão.

À minha Avó de coração, Rosângela. Minha fã, que me adotou no momento em que me viu pela primeira vez. Obrigado por sempre torcer e me incentivar em tudo, sempre rezando e me amando mesmo longe.

E a todos os meus familiares, que sempre torceram por mim e me incentivaram da melhor maneira. Minhas irmãs, Nicole, Duda e Gabi. Meu irmão de coração Axl, minhas segundas mães, Cláudia (“Titi”) e Maristela. Minha Avó Eurides, e todo o pessoal de Ivaiporã, Guarapuava e Passo Fundo. Amo incondicionalmente todos vocês.

Ao Professor Ricardo Suzuki, que foi meu professor, e hoje é meu chefe e amigo. Obrigado pela confiança na minha capacidade e trabalho, desde as épocas do cursinho até as salas de aula, e por me inspirar a seguir no caminho da educação.

A todos os meus mais queridos amigos. Em especial, Matheus, Marcos, Pedro Antônio, Vinícius, Maurício e André pela jornada de longa data, sempre lado a lado. Sabemos que somos mais irmãos do que amigos a essa altura, e eu não seria quem sou hoje se não fosse por vocês. Aos meus queridos amigos do *Pokémon*, Lucas Abu, Trento, Pedro, Campana, Jean, Neme e todos os “*Maringá Jokers*”, obrigado pelas incontáveis horas de risadas e descontração, que me davam o combustível necessário para seguir em frente durante a graduação. Aos meus amigos de graduação, obrigado pela parceria nessa difícil jornada em todos esses anos.

Agradeço também a todos os professores e servidores os quais contribuíram direta ou indiretamente durante minha jornada, ao DFI, e à UEM como um todo.

E principalmente, obrigado, Pedro Henrique de 2019, pela sua coragem de mudar radicalmente de vida e seguir o seu sonho. Deu tudo certo, e você conseguiu.

Muito Obrigado!

Lista de Figuras

II.2.1	Representação de uma onda plana se deslocando no eixo x . Imagem adaptada de [4].	17
II.3.1	Onda plana no eixo x , atingindo uma configuração circular de partículas no eixo $y0z$. Imagem adaptada de [4] e [5].	20
II.3.2	Representação ilustrativa da polarização $+$ em um conjunto de partículas. Adaptado de [5].	21
II.3.3	Representação ilustrativa da polarização X em um conjunto de partículas. Adaptado de [5].	21
III.2.1	Ilustração do interferômetro de Michelson, conforme descrito anteriormente. Fonte: [6].	26
III.2.2	Imagem área da base do LIGO em Livingston, Lousiana. Fonte - CALTECH/MIT/LIGO Laboratory [7].	26
III.2.3	Montagem do interferômetro de Michelson com cavidades de Fabry-Perot. Fonte: [6].	27
III.2.4	Momento em que as duas bases do LIGO detectaram a radiação gravitacional. Note que os dados de cada interferômetro, quando unidos, convergem pra o modelo teórico. Fonte: [6].	28
III.2.5	Detector de radiação gravitacional Mario Schenberg, localizado no INPE, em São José dos Campos - SP. [8]	29

Sumário

Introdução	1
I Teoria da Relatividade Geral	3
I.1 Contexto Histórico: Uma Gravidade Geométrica	3
I.2 Princípio da Equivalência e Referenciais Generalizados . . .	4
I.3 Geometria Riemanniana e a Curvatura do Espaço-Tempo . .	6
I.3.0.1 Tensor de Riemann	6
I.3.1 Relações de Bianchi e o Tensor de Einstein	8
I.4 Equações de Einstein e Gravitação	9
II Ondas Gravitacionais: Teoria	13
II.1 Equações Linearizadas e Invariância de Calibre	13
II.2 Equação de Onda	15
II.3 Graus de Polarização	20
III Detecção de Ondas Gravitacionais	23
III.1 Contexto Histórico: As Ondas Gravitacionais existem de fato?	23
III.2 Detectores de Ondas Gravitacionais	24
III.2.1 Barras de Weber	24
III.2.2 Interferômetros <i>Laser</i> e LIGO	25
III.2.2.1 As detecções do LIGO	27
III.2.3 Detecção de Ondas Gravitacionais no Brasil	28
III.2.4 O Futuro da Astrofísica de Ondas Gravitacionais . . .	30
Referências Bibliográficas	34
A Tensores e Álgebra Tensorial	38
A.1 Escalares, Vetores e suas Bases	38
A.2 Vetores Contravariantes e Covariantes	39
A.3 Definindo Tensores de Ordem Superior	40
A.4 Operações com Tensores	41
A.4.1 Adição e Subtração	41
A.4.2 Simetria	41
A.4.3 Contração de Índice e Produto Interno	42

A.4.4	Produto Direto	42
A.4.5	Tensor Métrico, Abaixamento e Levantamento de Índices	43
A.4.5.1	Derivação	44

Introdução

Ondas Gravitacionais é um assunto que tem permeado o cotidiano dos curiosos por Ciência, com destaque na última década. Mais do que isso, até mesmo leigos já se depararam com o tópico uma vez ou outra recentemente. Estas pequenas perturbações no espaço-tempo têm vindo aos holofotes devido ao sucesso do projeto LIGO, que as detectou mais de 100 anos após a sua teorização por Albert Einstein.

Einstein, em 1915, propôs uma quebra de paradigmas ao discordar da teoria da gravitação de Newton, que tratava a gravidade como uma força de caráter instantâneo, agindo por todo o Universo. A partir desse momento, a gravidade passa a ser uma distorção do espaço-tempo, e viaja a uma velocidade limitada e igual ao da luz, a qual Einstein postulou como o limite de todos os movimentos.

Em sua teoria, Einstein obteve equações que, quando linearizadas, em muito se assemelhavam as das equações das ondas eletromagnéticas. Esse foi o começo do que culminaria hoje nesse que é um dos tópicos mais intrigantes da Ciência. O estudo de ondas gravitacionais permite o aprofundamento e uma visão mais geral de assuntos vistos durante a graduação, mantendo o aluno em contato com a Ciência que vem sendo realizada recentemente.

Em vista disso, esse foi o tema escolhido para esta monografia de trabalho de conclusão de curso. Como forma de apresentá-lo, o separamos da seguinte maneira:

No Capítulo 1, apresentamos a Teoria da Relatividade Geral. Vemos como o contexto da época levou Einstein a formular suas famosas equações de campo, usufruindo de ferramentas de álgebra tensorial e geometria diferencial. Mais especificamente, mostramos como o princípio da equivalência foi fundamental para mudar a forma como a gravidade era vista, e como isso foi de grande importância para o surgimento de questões como ondas gravitacionais, buracos negros e estrelas de nêutrons.

No Capítulo 2, aprofundamos a discussão com a aproximação de campos gravitacionais fracos, para assim encontrarmos as soluções de onda para

as equações de Einstein. Ficará claro como é possível o uso da métrica de Minkowski em conjunto com a métrica do espaço-tempo curvo para encontrar as ondas gravitacionais de forma plena. Resolvidas as equações de campo, analisamos as componentes do tensor de perturbação, com o intuito de mostrar os perfis de polarização que as ondas gravitacionais adquirem ao se propagarem pelo espaço-tempo.

No Capítulo 3, damos uma fundamentação histórica sobre os métodos de detecção de ondas gravitacionais. Passamos desde o modelo pioneiro de Weber, com suas barras de alumínio e cristais piezoelétricos, até os interferômetros à *laser* como o LIGO. Também discutimos um pouco sobre as medições ocorridas de forma bem sucedida desde o ano de 2015, e como o Brasil se destaca nesse âmbito.

Para terminar, apresentamos as Considerações Finais, seguidas das principais Referências utilizadas para compor o presente trabalho.

Caso a familiaridade com a matemática presente nessa monografia seja pouca, nas últimas páginas disponibilizamos um apêndice que discorre sobre álgebra tensorial. Nele tratamos um pouco de como podemos manipular tensores, operações com seus índices e transporte paralelo.

Teoria da Relatividade Geral

Este capítulo inicia-se com um contexto histórico sobre a curvatura do espaço-tempo (geometria). Posteriormente, é abordada uma seção sobre o Princípio da Equivalência, seguido da seção sobre a geometria riemanniana que o descreve, até a obtenção das equações de campo de Einstein, que conecta a geometria (representado pelos tensores de curvatura) com a matéria (representada pelo tensor momento-energia).

I.1 Contexto Histórico: Uma Gravidade Geométrica

Em 1905, o até então pouco conhecido físico alemão Albert Einstein [1] ganhou os holofotes da Ciência em seu *annus mirabilis*^I, com uma série de publicações^{II} que vieram a revolucionar e dar novos rumos a Ciência moderna, com consequências e implicações até os dias de hoje. A sua teoria de relatividade especial (TRE) [10] redefiniu paradigmas da mecânica, tornando a luz como o parâmetro absoluto de informações de um sistema físico, generalizando referenciais inerciais, integrando espaço e tempo em algo único, e relativizando tempo e velocidade para um dado referencial^{III}.

A relatividade especial alterou a percepção de referenciais inerciais, com esses tendo seu estado perante as leis físicas generalizados. Essa quebra com a bem estabelecida mecânica newtoniana^{IV} culminaria, em 1915, em Einstein generalizando todo e qualquer tipo de referencial, não somente os inerciais, como a *priori*.

Tal generalização trouxe à tona a Teoria da Relatividade Geral (TRG). Nela, a gravidade, como resultado do princípio da equivalência, é descrita pelo tensor métrico que aponta a curvatura do espaço-tempo em si, e não por um campo adjacente que nele se propaga. Isso faz da TRG uma abor-

^IExpressão em latim, traduzido para “ano miraculoso/incrível”. Na Ciência, é usado para se referir a quando um pesquisador publicou alguns dos maiores trabalhos da sua carreira todos no mesmo ano [9].

^{II}Efeito fotoelétrico, Movimento Browniano, Teoria da Relatividade Especial, com a equação $E = mc^2$.

^{III}Neste trabalho, pouco será abordado sobre a Teoria da Relatividade Especial, dando um enfoque maior nas suas consequências para a Relatividade Geral. Para um estudo mais a fundo do assunto, sugere-se consultar as fontes [11] e [12].

^{IV}Isaac Newton (1643-1727), filósofo natural inglês e autor de obras como “Principia” [13], que moldaram os conceitos da mecânica e dinâmica de corpos na ciência moderna [14].

dagem geométrica da gravitação, que acaba por ser muito bem descrito pela geometria riemanniana^V.

Conforme descrito por Carroll [5], o grande “*insight*”, da teoria de Einstein, é o fato da interação da gravidade com a matéria ser um tanto “especial”.

Na próxima seção, entenderemos como a TRG vê a gravidade de uma maneira geométrica, em consequência do que foi mostrado por Einstein como o Princípio da Equivalência.

I.2 Princípio da Equivalência e Referenciais Generalizados

É possível destrinchar o Princípio da Equivalência em várias formas. A sua forma inicial, é o Princípio da Equivalência Fraco (*Weak Equivalence Principle*, ou WEP), que relaciona os conceitos de massa inercial e massa gravitacional.

A segunda lei da mecânica newtoniana afirma que a quebra da inércia de um corpo, ou seja, a alteração da forma como ele se movimenta, é causada pela ação de uma força resultante,

$$\vec{F}_r = \frac{d\vec{P}}{dt} = m_i \vec{a}. \quad (\text{I.1})$$

Portanto, a massa inercial (m_i), nesse caso constante, se configura como a resistência exercida por um certo corpo à quebra de sua inércia, sob ação de certa força.

Já no caso da gravitação newtoniana, a atração gravitacional sob um corpo pode ser escrita da forma,

$$\vec{F}_g = -m_g \vec{\nabla} \phi. \quad (\text{I.2})$$

Sendo a massa gravitacional (m_g), uma constante de proporcionalidade multiplicando o gradiente do potencial gravitacional escalar. A princípio, ambas as massas se apresentam com conceitos bem distintos. No entanto, conforme descrito pelos experimentos de Galileu^{VI}, corpos com massas diferentes são atraídos da mesma forma gravitacionalmente [12]. Isto é, sem-

^VRamo da geometria diferencial que estuda variáveis diferenciáveis com um produto interno sobre o espaço tangente em cada ponto que varia de ponto a ponto.

^{VI}Galileu Galilei (1564-1642), físico florentino, frequentemente conhecido como um dos pais da Ciência moderna. [15]

pre que um corpo está sujeito apenas a força gravitacional (queda livre), a aceleração por ele adquirida é igual a aceleração gravitacional. Consequentemente:

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (\text{I.3})$$

$$m_i\vec{a} = -m_g\vec{\nabla}\phi, \quad (\text{I.4})$$

$$m_i = m_g. \quad (\text{I.5})$$

Fazendo com que a equação (I.5) se traduza no WEP. Essa equivalência foi comprovada experimentalmente por Eötvös^{VII}, em seu conhecido experimento com pêndulo. Deste modo, se tornou possível afirmar que um corpo, quando sujeito a queda livre, segue preferencialmente uma trajetória do espaço-tempo conhecida como inercial.

Com o advento da Relatividade Especial, o conceito de massa passou a ser abordado de maneira diferente, devido a equivalência massa-energia. Isso levou Einstein generalizar a WEP, de modo a abranger os conceitos de sua recém publicada teoria.

A conclusão deduzida por Einstein foi de que, um observador, quando desprovido de informações acerca da origem de uma aceleração a qual está submetido, não consegue distinguir essa aceleração como sendo gravitacional ou não. Essa afirmação pode ser exemplificada no caso do físico dentro de uma nave espacial. Se o físico executar experimentos semelhantes ao de Galileu, abandonando corpos dentro da nave, e estes se movimentarem aceleradamente, não é possível distinguir se essa quebra de inércia é causada por uma aceleração do foguete, ou por um corpo massivo nas redondezas da nave.

Além disso, Einstein concluiu que como a gravidade está presente em todo o Universo, não existem corpos neutros a sua atração. Portanto, por menor que seja, todo referencial está sujeito a uma pequena aceleração, que o impede de fato, de ser inercial. Apesar da possibilidade de se considerar a existência de referenciais inerciais localmente, não é possível estender esse comportamento para todo o espaço-tempo. Essas conclusões moldam o que é conhecido como Princípio da Equivalência.

Como consequência, se fez necessária uma teoria de gravitação em que abrange-se todo e qualquer referencial, e não somente os inerciais. Diante a esse dilema, Einstein buscou refúgio na geometria riemanniana. A

^{VII}Loránd Eötvös (1848-1919), físico e matemático húngaro [16].

gravidade, então, passa a ser tratada como um resultado da distorção do espaço-tempo. Com isso, o anteriormente citado “movimento acelerado” de todos os referenciais passa a ter uma nova abordagem, o que permite tratá-los como iguais perante todas as leis da física.

Todo o exposto implica, de maneira direta, em um único elemento: a curvatura. A aferição da precisão da analogia de Einstein para a gravidade nos leva a necessidade de estudar a geometria de espaços curvos, sob refúgio da Geometria Riemanniana.

I.3 Geometria Riemanniana e a Curvatura do Espaço-Tempo

Iniciamos esta seção apresentando o tensor de Riemann, que é uma quantidade geométrica definida sobre uma superfície que fornece a medida de sua curvatura, mas agora vista para o espaço-tempo.

I.3.0.1 Tensor de Riemann

Para tratar de um espaço-tempo curvo e definirmos os referenciais generalizados tal qual feito por Einstein, é imprescindível abordarmos estes sob a ótica de uma “variedade” (em inglês, *Manifold*). Estas são, por definição [17] um espaço topológico que se assemelha localmente a um espaço euclidiano, mas que apresenta curvatura em sua generalidade. Tal conceito se encaixa graciosamente na capacidade da TRE em definir referenciais locais, porém sem comprometer o viés de generalização proposto pela TRG no princípio de equivalência. Em vista disso, na geometria riemanniana, a curvatura se manifesta por conexões, relacionando vetores de espaços tangentes em pontos vizinhos. A conexão mais relevante no âmbito da TRG é a do objeto conhecido como Símbolo de Christoffel^{VIII}, levando em conta a métrica do espaço-tempo^{IX}:

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\rho\varpi}(\partial_{\mu}g_{\nu\varpi} + \partial_{\nu}g_{\varpi\mu} - \partial_{\varpi}g_{\mu\nu}). \quad (\text{I.6})$$

O uso de conexões é feito com o intuito de se tornar possível realizar a derivada covariante de um tensor. Conexões também aparecem na equação da geodésica, que é definida como o caminho mais curto entre dois pontos

^{VIII}Notação criada em homenagem ao matemático e físico alemão Elwin Bruno Christoffel. Ela estabelece a conexão entre os vetores da base em diferentes pontos, também conhecida como conexão afim.

^{IX}Tensor que define o comportamento de todos os outros em um espaço n-dimensional. A métrica do espaço-tempo curvo, $g_{\mu\nu}$, se relaciona com a métrica do espaço-tempo de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$. A notação adotada dessa última métrica, bem como a disposição dos índices dos tensores (0,1,2,3), é explicada a fundo no apêndice.

no espaço curvo, tal qual é um segmento de reta em um espaço euclidiano, pelo princípio variacional:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\rho^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\varpi} \frac{dx^\lambda}{d\rho} \frac{dx^\varpi}{d\rho} = 0. \quad (\text{I.7})$$

Ressaltando, de modo análogo:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}, \quad (\text{I.8})$$

o que aponta que a conexão afim possui simetria quanto aos índices covariantes, livrando o espaço-tempo de torção, e simplificando a abordagem geométrica da gravidade^X.

Não obstante, também definimos

$$\frac{Dg_{\mu\nu}}{Dx^\alpha} = g_{\mu\nu;\alpha} = 0. \quad (\text{I.9})$$

Isto é, a derivada covariante comuta com a métrica do espaço-tempo (Teorema de Ricci^{XI}), o que torna a conexão Γ compatível com a métrica do espaço-tempo^{XII}. Escrevendo explicitamente a derivada covariante na equação (I.9), em função de μ , ν e α , é possível obter a equação (I.6)^{XIII}.

Com isso, é possível expressar a curvatura de uma maneira mais técnica com o tensor de Riemann da seguinte forma,

$$R^\rho_{\varpi\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\varpi} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\varpi} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\varpi} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\varpi}. \quad (\text{I.10})$$

Esse tensor é o responsável por ditar a curvatura do espaço-tempo, e aparecerá mais a frente na discussão das equações de campo de Einstein.

Em um espaço curvo, ele também atua na variação de um vetor V^ρ quando em transporte paralelo em *loop* no espaço-tempo,

$$\delta V^\rho = R^\rho_{\varpi\mu\nu} V^\varpi A^\mu B^\nu, \quad (\text{I.11})$$

em que δV^ρ representa a variação do vetor, nas direções de dois vetores A^μ e B^ν .

Além disso, como o tensor de Riemann possui o primeiro índice sobrescrito, é possível relacioná-lo com a métrica para obtê-lo com todos os índices covariantes,

$$g_{\lambda\rho} R^\rho_{\varpi\mu\nu} = R_{\lambda\varpi\mu\nu}. \quad (\text{I.12})$$

^XExistem modelos que levam em conta um grau de torção do espaço-tempo, porém eles não serão abordados neste trabalho. Para mais sobre o assunto, checar [18].

^{XI}Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), matemático italiano que contribuiu amplamente para o cálculo tensorial [19].

^{XII}Também existem teorias que não consideram o teorema de Ricci, porém elas não serão trazidas a tona na discussão. Para mais informações sugerimos a referência [20].

^{XIII}No Apêndice encontra-se uma expansão mais detalhada acerca da derivada covariante.

O tensor de Riemann é antissimétrico para a troca entre os dois primeiros ou dois últimos índices, e simétrico na troca dos dois primeiros pares de índices com os dois últimos pares índices, ou seja,

$$R_{\lambda\varpi\mu\nu} = -R_{\varpi\lambda\mu\nu}, R_{\lambda\varpi\mu\nu} = -R_{\varpi\lambda\nu\mu}, \quad (\text{I.13})$$

$$R_{\lambda\varpi\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\varpi}. \quad (\text{I.14})$$

Sendo um tensor de quarta ordem, o tensor de Riemann possui 256 componentes.

As equações (I.13) e (I.14) nos permitem construir equações diferenciais com o tensor de Riemann, conhecidas como relações de Bianchi, que nos levam ao tensor de Einstein, fundamental para a TRG.

I.3.1 Relações de Bianchi e o Tensor de Einstein

Considerando as coordenadas geodésicas em um único ponto (referencial inercial local), e ampliando o espaço-tempo o suficiente, ele parecerá plano. Nesse espaço-tempo de Minkowski, é sempre possível escolhermos uma base em que sua métrica permaneça constante. Como o símbolo de Christoffel depende da métrica, os dois últimos termos da equação (I.10) serão nulos, mas sua derivada não, pois a escolha da base não permite alterar a sua curvatura, ficando com,

$$R^{\rho}{}_{\varpi\mu\nu} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\varpi,\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\varpi,\nu}. \quad (\text{I.15})$$

Que, quando derivada covariantemente^{XIV}, nos leva à,

$$R^{\rho}{}_{\varpi\mu\nu;\alpha} = \Gamma^{\rho}{}_{\nu\varpi,\mu\alpha} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\varpi,\nu\alpha}. \quad (\text{I.16})$$

Utilizando a propriedade de ciclicidade dos índices, teremos 3 equações do tipo da equação (I.16) que ao somar, o lado direito se anula, tendo como resultado,

$$R^{\rho}{}_{\varpi\mu\nu;\alpha} + R^{\rho}{}_{\varpi\nu\alpha;\mu} + R^{\rho}{}_{\varpi\alpha\mu;\nu} = 0. \quad (\text{I.17})$$

Sendo essa uma equação tensorial, portanto é válida para qualquer sistema de coordenada.

A seguir, aplicando $g^{\mu\rho}$ em $R_{\rho\varpi\mu\nu}$, é possível contrair o tensor de Riemann para formar o tensor de Ricci, $R_{\varpi\nu}$, e a equação (I.17) fica escrita na forma

^{XIV}No lado direito a derivada covariante pode ser considerada como uma derivada parcial por estarmos considerando um sistema de coordenadas inercial local.

$$-R_{\varpi\nu;\alpha} + R^{\rho}_{\varpi\nu\alpha;\rho} + R_{\varpi\alpha;\nu} = 0. \quad (\text{I.18})$$

Multiplicando a equação (I.18) por $g^{\varpi\nu}$,

$$-R_{;\alpha} + R^{\rho}_{\alpha;\rho} + R^{\nu}_{\alpha;\nu} = 0. \quad (\text{I.19})$$

Observamos que na equação (I.19) os dois últimos termos são iguais, portanto somando ambos, obtém-se,

$$R^{\rho}_{\alpha;\rho} - \frac{1}{2}R_{;\alpha} = 0. \quad (\text{I.20})$$

Sendo possível escrever a equação (I.20) como,

$$(R^{\rho}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\alpha}R)_{;\rho} = 0. \quad (\text{I.21})$$

Que multiplicado por $g^{\mu\alpha}$, resulta em:

$$(R^{\mu\rho} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}R)_{;\rho} = 0. \quad (\text{I.22})$$

Sendo assim, é possível escrever o termo à esquerda da equação (I.22) como um novo tensor, conhecido como tensor de Einstein:

$$G^{\mu\rho} = R^{\mu\rho} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}R. \quad (\text{I.23})$$

$$G^{\mu\rho}_{;\alpha} = 0. \quad (\text{I.24})$$

Que indica alguma grandeza conservada.

I.4 Equações de Einstein e Gravitação

Previamente muito bem estabelecida, a gravitação newtoniana [13] apontou que a atração gravitacional obedece a equação de Poisson^{XV} dada por,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (\text{I.25})$$

em que ϕ ,

$$\phi = -G \int \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (\text{I.26})$$

representa o potencial gravitacional, G a constante de gravitação universal e ρ a densidade de massa.

^{XV}Siméon Denis Poisson (1781-1840), matemático e físico francês, ao qual foi homenageado com o nome da generalização da equação de Laplace [21].

Para conectar a teoria newtoniana com a TRG, de modo que a equação (I.25) se torne um caso em particular, se faz necessário uma equação tensorial que relacione a métrica do espaço-tempo, gravidade e densidade de massa.

A partir da TRE, sabemos que a densidade de massa é generalizada pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ [10]. Na equação da geodésica, equação (I.7), a métrica $g_{\mu\nu}$ se comporta similarmente ao potencial gravitacional. E para finalizar, a equação tensorial não deve conter derivadas maior que segunda ordem em relação a métrica, com a última tendo característica linear, de modo ainda a obedecer a equação de Poisson. O tensor de Einstein, deduzido na seção I.4, obedece de maneira satisfatória esses critérios, de modo que Einstein o relacionou com o tensor energia-momento pela seguinte equação de campo [22],

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{I.27})$$

Multiplicando por $g^{\mu\nu}$ a equação (I.27) e substituindo a equação (I.23) se obtém:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \\ G &= R - 2R = \kappa T, \\ R &= -\kappa T, \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

em que: $G = G_{\mu}^{\mu}$, $R = R_{\mu}^{\mu}$ e $T = T_{\mu}^{\mu}$. Dessa maneira, também é possível deduzir que,

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (\text{I.29})$$

Para compreender com exatidão a equação (I.27), se faz necessário encontrar κ , além do fato de que as equações (I.29) e (I.25) devem convergir no limite não-relativístico.

Em tal limite, é possível tirarmos proveito da aproximação para campos gravitacionais fracos, em que a métrica do espaço-tempo, $g_{\mu\nu}$ pode ser decomposta na forma,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{I.30})$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo de Minkowski, e $h_{\mu\nu}$ é o tensor de perturbação métrico, causado por um campo gravitacional fraco. Ademais, é possível considerar o tensor energia-momento do sistema advindo de um fluido, para qual,

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu, \quad (\text{I.31})$$

em que U_μ é a quadri-velocidade do fluido e ρ é a densidade de momento. Do ponto de vista da gravitação, esse fluido pode ser um corpo massivo, como uma estrela. Dito isso, tratando o caso no referencial em repouso desse corpo massivo, o tensor U_μ é dado por,

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0)$$

sendo,

$$U^0 = 1 + \frac{1}{2}h_{00}. \quad (\text{I.32})$$

Para a aproximação de campos gravitacionais fracos, convém a aproximação, $U^0 \approx 1$ e $U_0 \approx -1$, para assim,

$$T_{00} = \rho, \quad (\text{I.33})$$

que se apresenta como a energia de repouso.

Substituindo a componente da equação (I.33) na equação (I.29) obtém-se a componente 00,

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho. \quad (\text{I.34})$$

A partir da contração que nos mostrou o tensor de Ricci, na equação (I.18), e da aproximação de campos fracos, fica possível notar que,

$$R_{00} = R_{0\lambda 0} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00},$$

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa\rho. \quad (\text{I.35})$$

Sendo que a equação (I.35) apresenta a forma da equação de Poisson. Além do mais, na equação da geodésica, equação (I.7), no limite não-relativístico abordado, também aliado a aproximação de campo gravitacional fraco, é possível chegar em,

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_\mu h_{00}. \quad (\text{I.36})$$

Que se assemelha a segunda lei de Newton, que na gravitação leva a,

$$h_{00} = -2\phi. \quad (\text{I.37})$$

Por fim, a constante apontada por Einstein pode ser deduzida, a partir das equações: (I.25) e (I.37),

$$\kappa = 8\pi G. \quad (\text{I.38})$$

Trazendo a tona a equação de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (\text{I.39})$$

ou,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (\text{I.40})$$

A equação (I.40) pode ser considerado o maior trunfo de Einstein para a TRG, com uma equação que relaciona a distribuição de matéria em uma dada região com a curvatura do espaço-tempo.

Divergindo da bem estabelecida teoria newtoniana, agora a gravidade de um corpo massivo é fruto da distorção do espaço-tempo a sua volta. Tais resultados mudaram paradigmas na Ciência e deram início a uma nova área na Astrofísica, a Cosmologia Física. Fenômenos como Buracos Negros, Ondas Gravitacionais, *redshifts gravitacionais* e Estrelas de Nêutrons passaram a ser uma realidade.

Neste trabalho, buscamos focar em um desses fenômenos, as ondas gravitacionais. Nos próximos capítulos, entenderemos como estas surgem na resolução da equação (I.40), quais as suas diferenças para com as ondas eletromagnéticas, e como funcionam os seus métodos de detecção.

Ondas Gravitacionais: Teoria

Devido ao fato da gravidade ser advinda de uma força de fraca intensidade quando comparada com as outras três forças fundamentais da natureza, mesmo os eventos cósmicos gigantescos irão produzir perturbações no espaço-tempo (ondas gravitacionais) de fraca intensidade [23]. Sendo assim, neste capítulo será realizado uma abordagem teórica, iniciando por obter as equações de campo linearizadas, para obter a equação da onda e os graus de polarização das ondas gravitacionais.

II.1 Equações Linearizadas e Invariância de Calibre

Para encontrarmos a solução para ondas gravitacionais das equações de Einstein, vamos abordar novamente a expansão para campos gravitacionais fracos, equação (I.30). Conforme exposto anteriormente, nessa aproximação, as métricas do espaço-tempo curvo e de Minkowski, $g_{\mu\nu}$ e $\eta_{\mu\nu}$, respectivamente, diferem de maneira muito sutil. Consequentemente, é possível expandir a primeira na série perturbativa,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{II.1})$$

ou,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (\text{II.2})$$

em que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. O tensor de perturbação métrica, $h_{\mu\nu}$, também obedece a métrica de Minkowski, ou seja,

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}. \quad (\text{II.3})$$

Isso nos permite obter as equações de campo de Einstein em função desse tensor de perturbação, iniciando pela alteração da conexão afim, equação (I.6),

$$\begin{aligned} \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} &= \frac{1}{2}g^{\rho\varpi}(\partial_{\mu}g_{\nu\varpi} + \partial_{\nu}g_{\varpi\mu} - \partial_{\varpi}g_{\mu\nu}) \\ \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\varpi}(\partial_{\mu}h_{\nu\varpi} + \partial_{\nu}h_{\varpi\mu} - \partial_{\varpi}h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

De forma análoga, os tensores de Riemann, equação (I.10), e de Ricci, $R_{\lambda\varpi} = g^{\mu\nu} R_{\mu\lambda\nu\varpi}$ resultam respectivamente em,

$$R_{\lambda\varpi\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\varpi h_{\lambda\nu} + \partial_\nu\partial_\lambda h_{\varpi\mu} - \partial_\nu\partial_\varpi h_{\lambda\mu} - \partial_\mu\partial_\lambda h_{\varpi\nu}). \quad (\text{II.5})$$

$$R_{\lambda\varpi} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\varpi h^\nu{}_\lambda + \partial_\nu\partial_\lambda h^\nu{}_\varpi - \partial_\lambda\partial_\varpi h - \square^2 h_{\lambda\varpi}), \quad (\text{II.6})$$

com $h = h^\mu{}_\mu$, e $\square^2 = -\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ representando o operador d'alembertiano^I.

Já o escalar de Ricci, $R = g^{\lambda\varpi} R_{\lambda\varpi}$, se apresenta da forma,

$$R = \partial_\lambda\partial_\varpi h^{\lambda\varpi} - \square^2 h. \quad (\text{II.7})$$

Unindo as equações (II.6) e (II.7), é possível escrever o tensor de Einstein, equação (I.23) $G_{\lambda\varpi} = R_{\lambda\varpi} - \frac{1}{2}\eta_{\lambda\varpi}R$, como,

$$G_{\lambda\varpi} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\varpi h^\nu{}_\lambda + \partial_\nu\partial_\lambda h^\nu{}_\varpi - \partial_\lambda\partial_\varpi h - \square^2 h_{\lambda\varpi} - \eta_{\lambda\varpi}\partial_\sigma\partial_\theta h^{\sigma\theta} + \eta_{\lambda\varpi}\square^2 h). \quad (\text{II.8})$$

Dado o exposto, a equação (II.8) nos apresenta uma equação de campo linearizada para a perturbação $h_{\mu\nu}$. Porém, é cabível a existência de múltiplos sistemas de coordenadas os quais podem ser decompostos na métrica de Minkowski mais uma perturbação, similar a aproximação de campos gravitacionais fracos. Consequentemente, se faz necessário especificarmos a perturbação. Para solucionar esse empecilho, especificando a nossa perturbação, é possível começarmos por uma transformação de coordenadas:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu, \quad (\text{II.9})$$

em que na equação (II.9), a métrica se altera de $g_{\mu\nu}$ para outra $g'_{\mu\nu}$. Derivando-a em relação a x^ν , e convertendo a métrica, obtém-se,

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \zeta^\mu{}_{,\nu} \quad (\text{II.10})$$

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \quad (\text{II.11})$$

Como $\zeta^\mu{}_{,\nu} = \partial\zeta^\mu/\partial x^\nu$ é, no máximo, da mesma magnitude que $h_{\mu\nu}$, é possível transformar a perturbação de modo que^{II}:

^IOperador nomeado em homenagem ao matemático, filósofo e físico francês Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) [24]. Representa a generalização do operador de Laplace na métrica de Minkowski.

^{II}É imprescindível notar que ζ^μ também obedece a métrica de Minkowski, sendo $\zeta_\nu = \eta_{\nu\mu}\zeta^\mu$.

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\nu \zeta_\mu - \partial_\mu \zeta_\nu. \quad (\text{II.12})$$

O que configura uma transformação de calibre ^{III}. Sendo assim, as equações (II.7) e (II.6) se tornam invariantes sob a mesma transformação, o que torna a perturbação $h_{\mu\nu}$ unívoca. A equação (II.12) é conhecida como transformação de calibre para a teoria linearizada, e gera nas equações de Einstein o que é conhecido como invariância de calibre.

O próximo passo é obter a equação de onda.

II.2 Equação de Onda

Para obter a equação de onda se baseia em realizarmos a substituição,

$$\psi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}, \quad (\text{II.13})$$

o que leva o tensor e o escalar de Ricci, equações (II.6) e (II.7) respectivamente, a se modificarem para,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\psi_{\mu,\nu\alpha}^\alpha + \psi_{\nu,\mu\alpha}^\alpha - \square^2 h_{\mu\nu}); \quad (\text{II.14})$$

e

$$R = \frac{1}{2}(2\psi_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \square^2 h). \quad (\text{II.15})$$

Por conseguinte, o tensor de Einstein também se altera para

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\psi_{\mu,\nu\alpha}^\alpha + \psi_{\nu,\mu\alpha}^\alpha - \square^2 \psi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \psi_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta}). \quad (\text{II.16})$$

Além disso, realizando a transformação:

$$\psi_{\nu,\mu}^\mu = \psi_{\nu,\mu}^\mu - \square^2 \zeta_\nu. \quad (\text{II.17})$$

Nos leva, na equação (II.16), a uma equação de onda, se for cumprido o requisito conhecido como calibre de Einstein^{IV}:

$$\psi_{\nu,\mu}^\mu = h_{\nu,\mu}^\mu - \frac{1}{2}h_{,\nu} = 0. \quad (\text{II.18})$$

^{III}Do inglês *gauge*

^{IV}Esse nome, na literatura, pode variar, homenageando outros autores, dentre eles: Calibre de Hilbert, Fock ou de Donder [25]

Que induz obrigatoriamente ao

$$\square^2 \zeta_\nu = \psi_{\nu,\mu}^\mu. \quad (\text{II.19})$$

Realizando as devidas substituições nas equações (II.16) e (I.27), obtêm-se

$$\frac{1}{2} \square^2 \psi_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (\text{II.20})$$

que se configura como uma equação de onda, na forma tensorial, com um termo de fonte relacionado ao tensor momento-energia.

É interessante notar que a equação (II.20) em muito se assemelha a equação de onda do eletromagnetismo, dada por:

$$\square^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu, \quad (\text{II.21})$$

em que A_μ representa o quadrivetor potencial eletromagnético. A equação (II.21) apresenta uma solução da forma:

$$A_\mu(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 r' J_\mu(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (\text{II.22})$$

Analogamente é possível construir uma solução para a equação (II.20) similar a equação (II.22). Porém, neste trabalho, optamos por abordar as equações de ondas gravitacionais tomadas para o vácuo, sem os termos de fonte, de acordo com a aproximação para campos gravitacionais fracos. Com isso, a equação (II.20) se altera para

$$\square^2 \psi_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{II.23})$$

Essa abordagem não altera o calibre de Einstein das equações de campo. Tomando o traço da equação (II.23), é possível obter a equação de onda em função da perturbação do espaço-tempo

$$\eta^{\mu\nu} \square^2 \psi_{\mu\nu} = \square^2 \eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = \square^2 (h - 2h) = -\square^2 h = 0, \quad (\text{II.24})$$

Inclusive, se mostra imprescindível apontar que o operador d'alembertiano implica na onda gravitacional se deslocando com velocidade^V c . Esse fato em muito se difere da teoria newtoniana, em que a gravidade atua de maneira instantânea.

^VVelocidade da luz no vácuo, definida na teoria do eletromagnetismo por James Maxwell, em suas famosas equações, publicadas em seu trabalho *On Physical Lines of Force*, entre 1861 e 1862 [26].

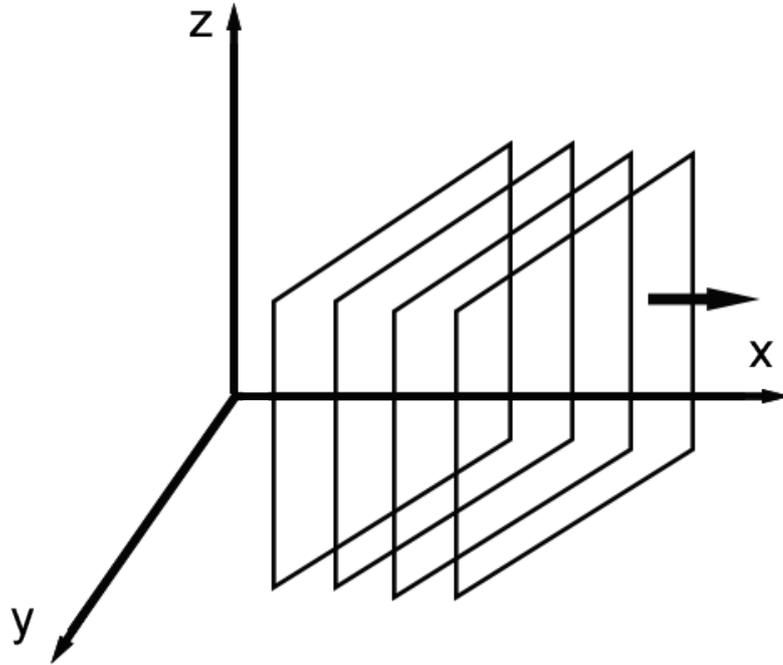
Além do mais, por estarmos desfrutando da aproximação de campos gravitacionais fracos, ou seja, o fato de que a métrica do espaço-tempo curvo e a de Minkowski se diferirem muito pouco, é possível relacionarmos o tensor de Riemann, equação (I.10), com a equação (II.24):

$$\square^2 R_{\lambda\varpi\mu\nu} = 0. \quad (\text{II.25})$$

Assim dizendo, segundo a equação (II.25), a própria curvatura do espaço-tempo segue uma equação de onda no vácuo.

Devido a complexidade da manipulação de um tensor da ordem do tensor de curvatura, neste trabalho optaremos por simplificar a natureza da onda gravitacional, de modo a zerar o máximo de componentes possíveis do tensor de Riemann, sem descaracterizar o comportamento de onda. Dito isso, é possível pensar na onda gravitacional como uma onda plana se deslocando no eixo x (coordenada x^1 no diagrama espaço-tempo, Figura II.2.1),

Figura II.2.1: Representação de uma onda plana se deslocando no eixo x. Imagem adaptada de [4].



representada pela equação

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t, x); \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^2} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^3} = 0. \quad (\text{II.27})$$

Com isso, as componentes do tensor de curvatura ficam da forma apresentada nas Tabelas II.1, II.2 e II.3 conforme segue,

Tabela II.1: Família de componentes nulas do tensor de curvatura.

$R_{0123} = 0$	$R_{0223} = 0$
$R_{0323} = 0$	$R_{1223} = 0$
$R_{1323} = 0$	$R_{2323} = 0$

Tabela II.2: Segunda família de componentes do tensor de curvatura.

$R_{0101} = (1/2)(2h_{01,01} - h_{0,11} - h_{11,00})$
$R_{0102} = (1/2)(h_{02,01} - h_{12,00})$
$R_{0103} = (1/2)(h_{03,01} - h_{13,00})$
$R_{0112} = (1/2)(h_{02,11} - h_{13,01})$
$R_{0113} = (1/2)(h_{03,11} - h_{13,01})$

Tabela II.3: Terceira família de componentes do tensor de curvatura.

$R_{0202} = -(1/2)h_{22,00}$
$R_{0213} = -(1/2)h_{33,01}$
$R_{0203} = -(1/2)h_{23,00}$
$R_{1212} = -(1/2)h_{22,11}$
$R_{0212} = -(1/2)h_{22,01}$
$R_{1213} = -(1/2)h_{23,11}$
$R_{0213} = -(1/2)h_{23,01}$
$R_{1313} = -(1/2)h_{33,11}$
$R_{0303} = -(1/2)h_{33,00}$

Ademais, é possível escolher um referencial em que $R_{\varpi\nu} = 0$, anulando todas as componentes da Tabela II.2,

$$R_{\varpi\nu} = R^{\mu}_{\varpi\mu\nu} = R_{0\varpi 0\nu} = 0. \quad (\text{II.28})$$

Com isso, é possível separar a perturbação em dois tensores, respectivos a cada família,

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (\text{II.29})$$

em que

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{II.30})$$

e

$$h_{\mu\nu}^{(2)} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ h_{01} & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{02} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{03} & h_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.31})$$

No entanto, substituindo os termos das componentes da matriz (II.31) na equação (I.10), se obtém um resultado igualmente nulo. Consequentemente, somente a matriz (II.30) contribui para a perturbação.

Portanto, a perturbação $h_{\mu\nu}$ pode ser tomada como uma solução de onda plana para as equações de Einstein,

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(t - x). \quad (\text{II.32})$$

Com a solução da equação (II.32) podendo tomar forma cossenoidal, ou exponencial,

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \cos \theta_{\alpha} x^{\alpha}, \quad (\text{II.33})$$

ou

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} e^{i\theta_{\alpha} x^{\alpha}} + \gamma_{\mu\nu}^* e^{-i\theta_{\alpha} x^{\alpha}}. \quad (\text{II.34})$$

Se consideramos o calibre de Einstein, equação (II.16), junto da equação II.3, também se torna possível notar que,

$$h_{22} = -h_{33}. \quad (\text{II.35})$$

Por conseguinte, a matriz de contribuição para a perturbação da onda fica representada na forma,

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{23} & -h_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.36})$$

Einstein, em 1918, descobriu que as ondas gravitacionais são produzidas quando existe uma variação do momento de quadrupolo entre dois objetos massivos, de forma que apresentam duas polarizações lineares, denotadas de h_{+} e $h_{\mathbf{x}}$, e que as demais ficam representadas por meio delas. Assim, $h_{\mu\nu}^{(1)}$ fica escrita sob a forma,

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{+} & h_{\mathbf{x}} \\ 0 & 0 & h_{\mathbf{x}} & -h_{+} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.37})$$

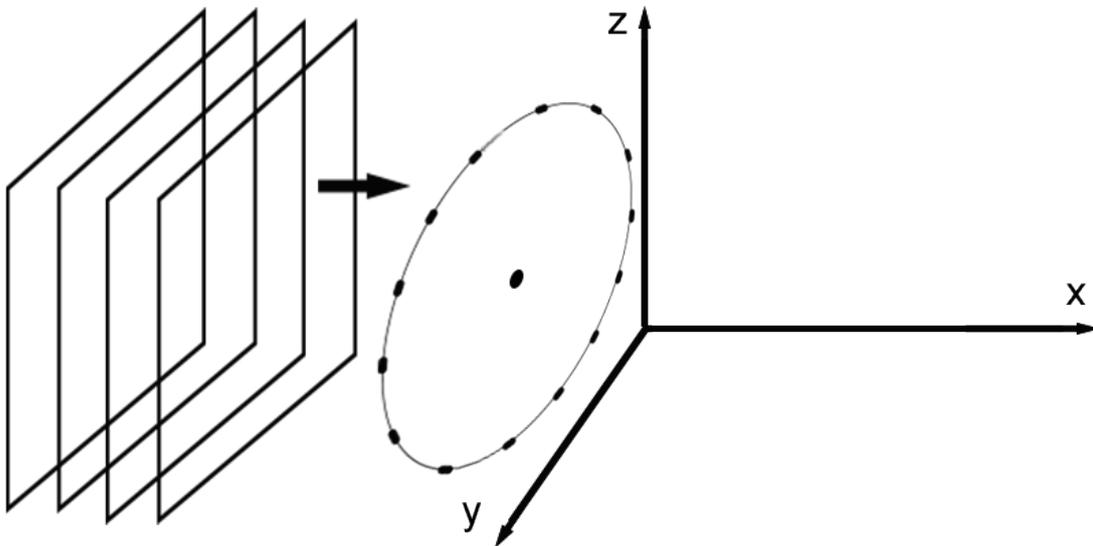
Essas componentes da matriz serão abordadas na seção II.3 à seguir.

II.3 Graus de Polarização

As componentes h_+ e h_x da matriz (II.37) representam uma diferente forma de interação da onda gravitacional com a matéria. Para melhor compreensão, tomaremos o caso em que somente uma delas age no espaço-tempo, com a outra nula.

Tomando, em primeiro lugar, $h_x = 0$, vamos considerar um pulso de onda gravitacional incidindo sobre uma configuração circular de partículas no eixo yOz , conforme indicado na Figura II.3.1.

Figura II.3.1: Onda plana no eixo x , atingindo uma configuração circular de partículas no eixo yOz . Imagem adaptada de [4] e [5].

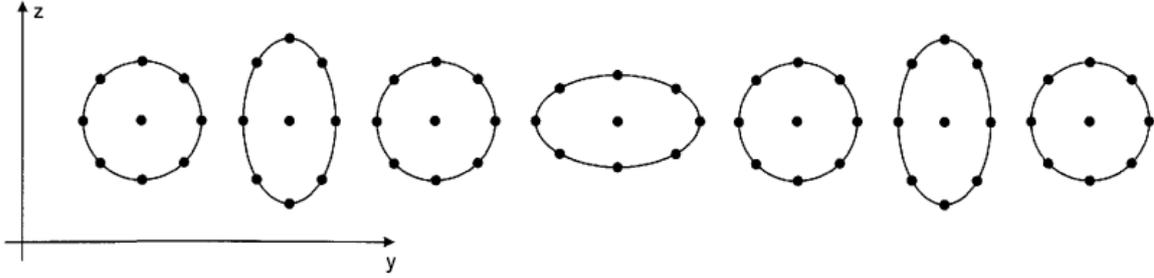


Com isso, o intervalo invariante no espaço-tempo, na versão linearizada de $g_{\mu\nu}$, é dada por,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - (1 - h_+(t - x))dy^2 - (1 + h_+(t - x))dz^2. \quad (\text{II.38})$$

Como h_+ tem caráter oscilatório, porém com amplitudes opostas nas componentes y e z , a medida que a distorção se torna máxima em y , ela se torna mínima em z , e vice versa. Isso reproduz uma distorção em duas distorções perpendiculares, chamada de “polarização + (mais)”, Figura II.3.2.

Figura II.3.2: Representação ilustrativa da polarização + em um conjunto de partículas. Adaptado de [5].

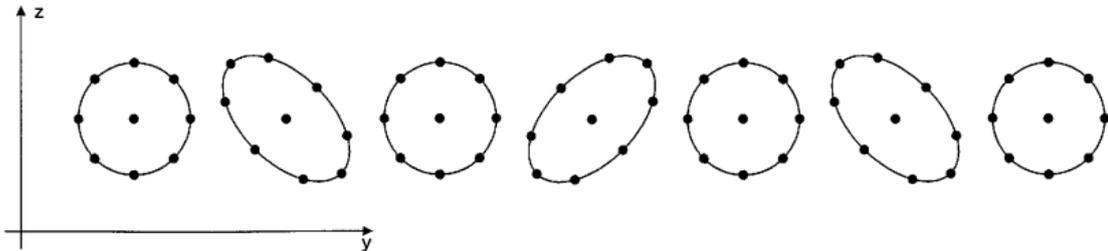


De forma análoga, podemos examinar o caso em que $h_+ = 0$, somente com h_x agindo, na mesma configuração da Figura II.3.1. O intervalo invariante no espaço-tempo, na versão linearizada de $g_{\mu\nu}$, fica:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 + 2h_x(t - x)dydz - dz^2 \quad (\text{II.39})$$

Nesse caso, obtemos uma pulsação similar ao caso anterior, porém agora ocorrendo com um ângulo de 45° com o plano yOz . Conforme ilustrada na Figura II.3.3. Essa distorção é conhecida como “polarização X (cruzada)”.

Figura II.3.3: Representação ilustrativa da polarização X em um conjunto de partículas. Adaptado de [5].



Conhecendo ambas as polarizações existentes, é possível relacionar uma amplitude para onda gravitacional. Essa amplitude deve levar em conta ambos os perfis de polarização. Chamando-a de h , podemos defini-la como é a atuação da onda em um comprimento L do espaço-tempo [27].

$$h = \frac{\delta L}{L} = [(h_+)^2 + (h_x)^2]^{1/2}, \quad (\text{II.40})$$

em que δL representa a distorção causada em um comprimento L . Como é possível observar, h é uma grandeza adimensional, tal qual os perfis de polarização.

Para ângulos diferentes de 0° , 90° , 180° e 270° e quaisquer outras amplitudes, a polarização será elíptica, o que corresponde que as partículas

teste descreverem uma elipse em rotação, cuja excentricidade estaria variando à medida que a elipse rodasse.

Conforme citado por Aguiar [27]: “As ondas gravitacionais que chegassem à Terra produzidas por um sistema binário composto por dois buracos negros ou estrelas de nêutrons, por exemplo, apresentariam polarização linear, circular ou elíptica, se o sistema estivesse orientado “*edge-on*”, “*face-on*”, ou em qualquer outra orientação diferente destas duas, respectivamente. Bom, então, a conclusão é que se uma onda gravitacional passasse por nós, ela iria provocar um contração e alongação dos nossos corpos, de forma que uma hora ficaríamos baixinhos e gordos e outra hora ficaríamos altos e magros. Nisto você se perguntaria: eu não sinto nada disto, portanto, estas ondas não devem existir!”

Ele [27] também responde que: “Não, as ondas existem sim, a explicação é que ela tem uma amplitude muito, muito, muito pequena. Uma onda gravitacional gigantesca, digamos uma onda “tsunami” com amplitude $h \sim 10^{-18}$, raríssima, que ocorre a cada ~ 100 anos, que passasse por nós, não conseguiria mudar a nossa altura mais do que a milésima parte do diâmetro de um próton! Portanto, felizmente as ondas gravitacionais não vão causar nenhuma dor nos nossos corpos, por mais fortes que elas sejam. Por outro lado, infelizmente, elas são muito difíceis de serem detectadas, por causa das amplitudes tão pequenas que possuem. Só com instrumentos muito sensíveis, construídos com altíssima tecnologia, é que foi possível detectá-la”. Sobre esses instrumentos uma abordagem será feita no Capítulo III desta monografia.

Conhecidos os aspectos principais da teoria, agora é crucial entendermos como podemos detectar essas ondas, dando assim um embasamento experimental a teoria de Einstein.

No próximo capítulo, falaremos um pouco sobre como funcionam os principais métodos de detecção de ondas gravitacionais existentes atualmente.

Detecção de Ondas Gravitacionais

Como já dito no início do Capítulo II, as ondas gravitacionais são consideradas fracas pela natureza da própria gravidade. Além disso, as distâncias astronômicas dos locais onde ocorrem tais eventos, a diminuição da sua intensidade conforme se propaga, e o fato de quase não interagirem com a matéria, são pontos que dificultam a sua detecção. Somente com o advento da melhoria da tecnologia e de grandes explosões estelares isso foi possível. Neste capítulo será apresentado um breve cenário de como isso ocorreu.

III.1 Contexto Histórico: As Ondas Gravitacionais existem de fato?

Desde sua formulação, em 1915, na teoria de Einstein, a existência de ondas gravitacionais tem gerado muito debate na comunidade científica. A questão se baseava em se elas tinham uma existência física de fato, ou se eram um mero artifício matemático do qual a TRG apresentava. O próprio Einstein, em certo momento, chegou a questionar a existência das mesmas. Foi somente na década de 60, anos após a morte de Einstein, que surgiram os primeiros artigos apontando que as ondas gravitacionais deveriam carregar energia, necessitando, de fato, de uma existência física [27].

Na década de 70, os trabalhos de Hulse e Taylor^I com o pulsar^{II} binário PSR B1913 vieram a ser a primeira detecção (indireta) de ondas gravitacionais. Nestes, medidas do período de rotação do pulsar eram feitas pelo radiotelescópio Arecibo, localizado em Porto Rico. Recorrentes variações nas medidas do período (que era medido com uma precisão de até 14 casas [27]) levaram Taylor a ligar esse atraso a perda de energia causada pela emissão de radiação gravitacional, conforme haviam previsto os arti-

^IRussell Alan Hulse (1950-) [28] e Joseph Hooton Taylor (1941-) [29], físicos americanos pioneiros nos estudos de pulsares e radiação gravitacional.

^{II}Estrela de Nêutrons com o campo magnético forte o bastante para emitir rajadas constantes de rádio pelo seus polos. Mais sobre o assunto pode ser visto em [30].

gos da década anterior [31]. Os cálculos de Taylor se encaixaram com as observações de Hulse, e em 1993, ambos foram agraciados com o prêmio Nobel de física por essa descoberta. Apesar de não ter sido detectada diretamente, foi comprovado que as ondas gravitacionais, existiam, de fato, em nosso Universo.

Com isso, a questão passou a ser como detectá-las diretamente. Se elas retiram energia de um sistema como duas estrelas de nêutrons ao serem emitidas, seria possível construir um detector para captar essa energia. Da teoria, se conheciam os perfis de polarização que as ondas tomavam, ou seja, tudo estava propício para a construção de um detector adequado.

III.2 Detectores de Ondas Gravitacionais

Nesta seção serão apresentados dois dos tipos de detectores de ondas gravitacionais, os de ressonância (barras de Weber) e o de interferometria (LIGO).

III.2.1 Barras de Weber

Em 1968, Joseph Weber^{III} foi pioneiro com a primeira tentativa em construir um detector de ondas gravitacionais. As chamadas “barras de Weber” consistiam em cilindros de alumínio, de aproximadamente 1,5 metros de comprimento e um metro de diâmetro. Ela era mantida em uma câmara a vácuo, para oscilar livremente, e cortar ruídos sonoros sísmicos e sonoros. Em seu centro, cristais piezoelétricos eram ligados em série, de forma que a menor deformação em sua superfície gerasse uma voltagem. Weber acreditava que um pulso adequado de radiação gravitacional poderia ser convertido em energia elétrica ao entrar em contato com a barra [33].

As barras de Weber conseguiram o mérito de ter uma precisão de amplitude $h \sim 10^{-15}$, mas que infelizmente não se mostrou suficiente para detectar o fenômeno. Weber veementemente defendeu que teve êxito em detectar ondas gravitacionais, mas seus resultados, hoje, são desacreditados. Não obstante, seu trabalho em muito inspirou futuros detectores.

Versões posteriores das barras de Weber também foram construídas. Na década de 70, novas barras, agora com 3 metros de comprimento por 60 centímetros de diâmetro, eram resfriadas a baixas temperaturas ($\sim 4K$), tirando proveito da supercondutividade de elementos como o Nióbio^{IV}. Es-

^{III}Joseph Weber (1919-2000) [32]. Físico estadunidense, pioneiro no ramo de detecção de ondas gravitacionais.

^{IV}Fenômeno caracterizado pela resistência elétrica nula em materiais resfriados a temperaturas próximas

sas barras criogênicas aturam durante as três décadas posteriores, chegando a sensibilidades de $10^{-20} Hz^{-1/2}$ para sinais do tipo *burst*^V.

Uma terceira versão do detector de Weber também foi construído. Chamadas de “massas ressonantes”, os detectores agora eram esferas de cobre-alumínio, mas que obedeciam os mesmos princípios que os anteriores. Elas compunham os detectores Mini-GRAIL, nos Países Baixos, e o Mario Schenberg, no Brasil. Ambos chegaram à operar com uma sensibilidade da ordem de $10^{-20} Hz^{-1/2}$. Sobre esse detector será apresentado na subseção III.2.3.

III.2.2 Interferômetros *Laser* e LIGO

Paralelamente na década de 70, também foram construídos interferômetros *laser* para detectar ondas gravitacionais, de maneira similar ao usado no famoso experimento de Michelson-Morley^{VI}.

O funcionamento desse tipo de interferômetro se baseia na variação de distâncias relativas entre vários *lasers*. Os braços do interferômetro são horizontais e perpendiculares entre si. A passagem de uma onda gravitacional perpendicular ao plano que contém o aparelho causa uma pequena variação no comprimento dos braços, que é detectada pelo descasamento do feixe que retorna com a posição inicial. Inicialmente, este é dividido em dois feixes perpendiculares por um *beam splitter*^{VII}, com cada porção percorrendo um dos braços perpendiculares. Na extremidade final de cada braço, os feixes são refletidos por um espelho plano, se juntando novamente. Parte da junção dos dois feixes é mandada para um fotodetector. Os espelhos são ajustados de forma que ocorra interferência destrutiva, com uma fase de 180° entre os feixes. Conforme ilustrado na Figura III.2.1.

Dessa forma, normalmente, nenhuma detecção de luz deve ocorrer. A passagem de radiação gravitacional quebra essa interferência, fazendo luz ser captada pelo detector.

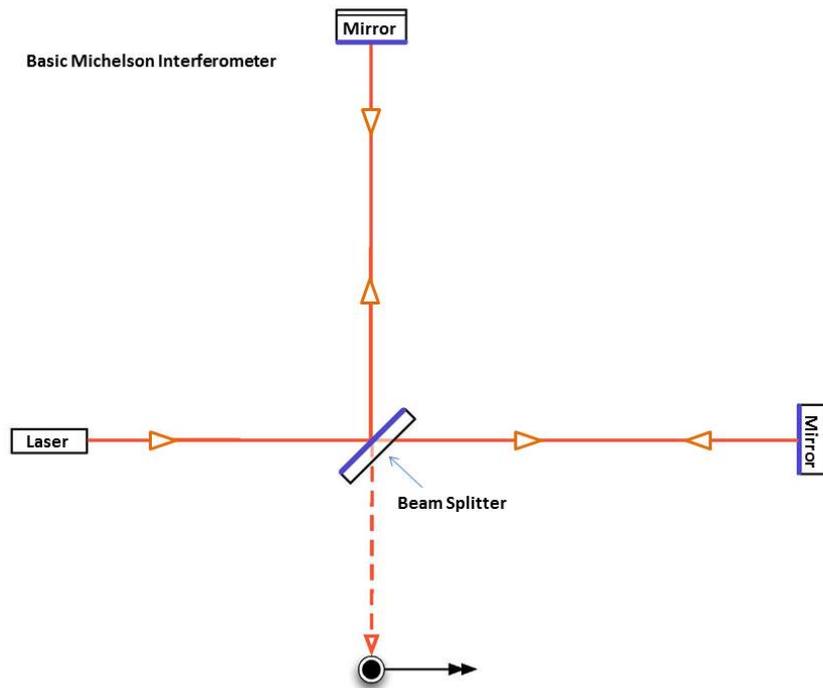
do zero absoluto. Mais sobre pode ser visto em [34].

^VTipo de emissão mais violenta de ondas gravitacionais, fruto de fenômenos como colisões de buracos negros. Outros tipos incluem periódica e estocástica.

^{VI}Aparelho usado por Albert Michelson (1852-1931) e Edward Morley (1838-1923) para medir o deslocamento da Terra em relação ao éter. Apesar de ter falhado no seu propósito inicial, o experimento serviu de base para ramos da Ciência contemporânea, como a Relatividade Espacial. Mais sobre pode ser checado em [35].

^{VII}Espelho 50% transparente colocado em um ângulo de 45 graus com o feixe inicial.

Figura III.2.1: Ilustração do interferômetro de Michelson, conforme descrito anteriormente. Fonte: [6].



Essa é a base do funcionamento dos interferômetros LIGO (acrônimo de *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*), que realizaram a primeira detecção direta de ondas gravitacionais. Eles estão localizados um em Livingston, no estado da Louisiana, Figura III.2.2, e o outro Hanford, no estado de Washington, nos EUA.

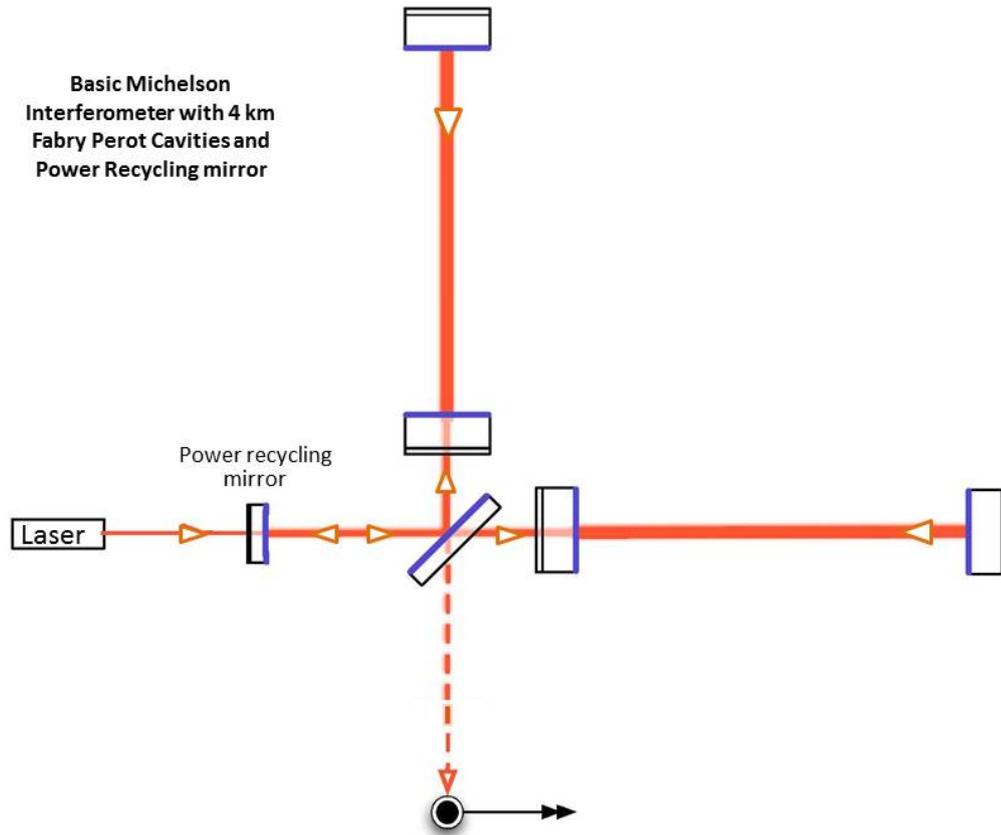
Figura III.2.2: Imagem aérea da base do LIGO em Livingston, Louisiana. Fonte - CALTECH/MIT/LIGO Laboratory [7].



Cada braço dos interferômetros possui 4km , e os espelhos nas suas extremidades estão alojados em cavidades de Fabry-Perot, Figura III.2.3.

Estas cavidades possuem vários espelhos extras quando comparados com o modelo básico de Michelson, e fazem com que o feixe faça cerca de 300 viagens de ida e volta ao longo do comprimento dos braços, percorrendo uma distância de aproximadamente 1200km . Essa viagem gigantesca permite que o *laser* acumule uma potência de cerca de 100kW , apesar da fonte prover poucas dezenas (cerca de 20W).

Figura III.2.3: Montagem do interferômetro de Michelson com cavidades de Fabry-Perot. Fonte: [6].



Toda essa estrutura massiva, aliada a presença de espelhos de reciclagem de energia e sinal, para não ocorrer o desperdício de luz no processo, garante uma sensibilidade altíssima para os dados coletados, da ordem de $10^{-23}\text{Hz}^{-1/2}$.

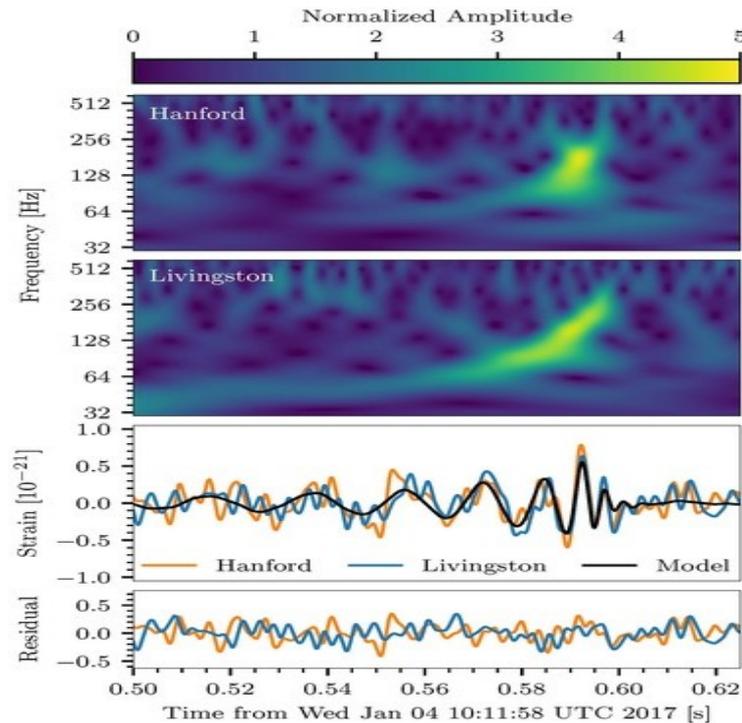
III.2.2.1 As detecções do LIGO

No dia 11 de fevereiro de 2016, pesquisadores anunciaram, em entrevista, que a detecção direta de ondas gravitacionais finalmente havia sido realizada no LIGO. O sinal foi captado em 14 de setembro de 2015, e foi gerado pela colisão entre dois buracos negros (com cerca de 30 massas solares

cada) à 1,3 bilhão de anos-luz^{VIII} da Terra.

Nesse violento acontecimento, o equivalente a 3 massas solares foram emitidos na forma de energia de ondas gravitacionais em menos de um segundo. As imagens da Figura III.2.4 ilustra o momento em que as duas bases do LIGO detectaram essa radiação.

Figura III.2.4: Momento em que as duas bases do LIGO detectaram a radiação gravitacional. Note que os dados de cada interferômetro, quando unidos, convergem pra o modelo teórico. Fonte: [6].



Menos de um ano depois, em 26 de dezembro de 2015, o LIGO teve sua segunda detecção. Dessa vez advinda da fusão de dois buracos negros menores (um com 14 massas solares, e outro com 7,5), conforme ilustrado na Figura III.2.5.

Nas próximas seções, falaremos um pouco do envolvimento do Brasil em projetos como o LIGO e na detecção e estudo de ondas gravitacionais, bem como suas perspectivas para o futuro.

III.2.3 Detecção de Ondas Gravitacionais no Brasil

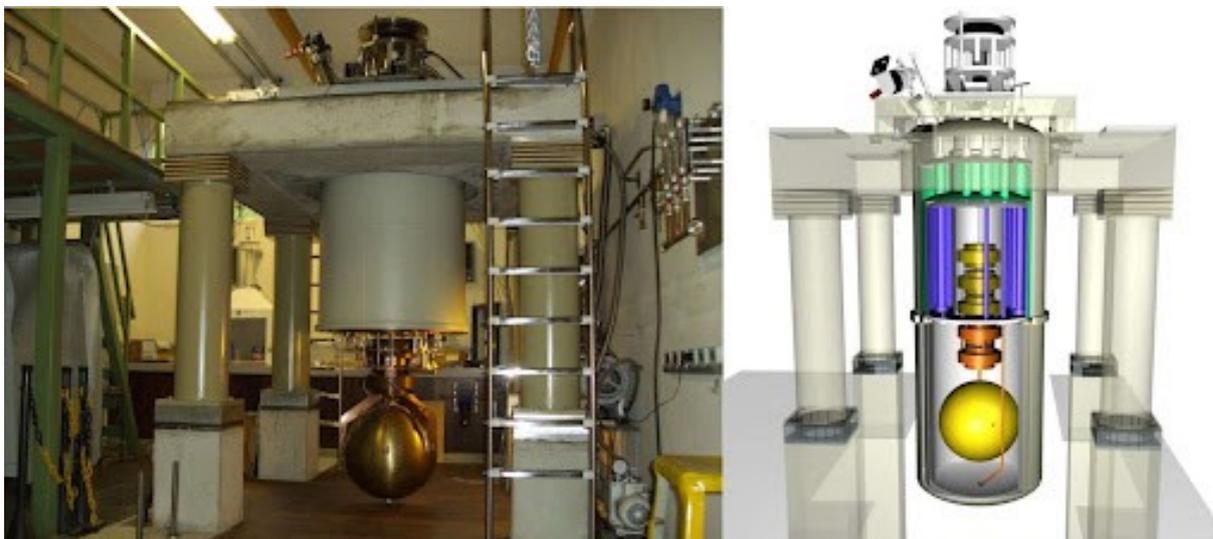
Conforme foi exposto na subseção III.2.1, o Brasil possui um detector próprio de ondas gravitacionais, chamado Mário Schenberg^{IX}. Ele segue

^{VIII}1 Ano-luz = $9,41 \times 10^{12}$ km.

^{IX}Mário Schenberg (1914-1990), físico brasileiro e ex-professor no IFUSP. [36]

o modelo idealizado por Weber, porém com esferas de massas-ressonante, conforme ilustrado na Figura III.2.6.

Figura III.2.5: Detector de radiação gravitacional Mario Schenberg, localizado no INPE, em São José dos Campos - SP. [8]



O detector Mário Schenberg consiste em uma antena esférica, pesando 1165 kg, e com 65 cm de diâmetro, feita de uma liga de Cobre-Alumínio. Ele está localizado no Edifício Mario Schenberg, no Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP).

Esse modelo de detector leva em conta um corpo sólido, que oscila com frequência similar a um sistema massa-mola. No lugar dos cristais piezoelétricos usados por Weber, são utilizados nove transdutores paramétricos que são alocados à antena esférica. Caso uma onda gravitacional entre em contato com essa antena, ela vibra e causa uma deformação mecânica no sistema. Associados aos transdutores, estão transformadores mecânicos de amplitude, que são utilizados para amplificar os deslocamentos sofridos pelas deformações e facilitar a detecção da onda^X.

Ele começou a ser construído no ano 2000, fruto de uma parceria entre pesquisadores do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP) da Capital, do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), da Universidade de Leiden, da Holanda, do Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo (CEFETSP), da Universidade Bandeirante (UniBan) e do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), no projeto conhecido como Projeto Gráviton, coordenado pelo Prof. Dr. Odylio Denis de Aguiar [39] do INPE.

^XMais sobre o princípio de funcionamento do detector Mário Schenberg pode ser consultado em [37] e [38].

Inclusive, sob direção de Odylio e César Costa, trabalha o grupo no INPE que participa ativamente do projeto de detecções do LIGO. O foco de seu estudo está no aperfeiçoamento vibracional do detector, e na sua operação com espelhos resfriados.

Porém, outro grupo brasileiro também atua ativamente como parte do LIGO. Dirigido por Riccardo Sturani, ele está localizado no Instituto de Física Teórica/Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (IFT/UNESP), no Instituto de Pesquisa Fundamental da América do Sul, filiado ao Centro Internacional de Física Teórica. Seu trabalho se baseia principalmente na modelagem e análise de dados de sistemas estelares binários coalescentes^{XI}.

Ambos os grupos participam ainda hoje ativamente da pesquisa em detecção de ondas gravitacionais, mantendo contato com o projeto LIGO, e construindo um cenário plenamente positivo para a pesquisa nesse ramo da astrofísica em solo nacional.

III.2.4 O Futuro da Astrofísica de Ondas Gravitacionais

Conforme o exposto nesse capítulo, foi possível perceber que, desde de a primeira detecção feita pelo LIGO, foi dada a largada a era das ondas gravitacionais na Ciência. Após a segunda detecção, em 2015, pesquisadores do LIGO afirmaram, em entrevista a revista *Science* [41], que almejavam, até o fim da década da passada, alcançar novos níveis de sensibilidade para aprimorar futuras detecções. O mesmo se concretizou, com novas medições ocorrendo até hoje [42].

O LIGO A+, versão aprimorada do LIGO, começou a funcionar em 2018, tirando proveito da técnica de *squeezing* do *laser*, a qual aumenta a sensibilidade das medidas. Com o passar do tempo, avanços ainda mais substanciais são esperados.

O projeto do LIGO *Cosmic Explorer*, estimado para funcionar propriamente a partir de 2035, busca a capacidade de detectores como o LIGO em detectar fontes binárias compactas em alto *redshift*^{XII}. Já o LIGO *Voyager*, versão atualizada do LIGO A+, é estimado para começar a funcionar em 2027. Essa nova versão do detector contara com espelhos de 200kg de silício, ao invés dos atuais de 40kg feitos de vidro. Os novos espelhos, resfriados a temperatura de 123K, irão contar com um ruído térmico de-

^{XI}Sistemas em que duas estrelas e/ou buracos negros estão em processo de fusão, conhecido como “dança da morte”. [40]

^{XII}Diminuição da frequência de radiações eletromagnéticas detectadas por conta de efeitos relativísticos no espaço-tempo. O tópico é abordado mais afundo em [5].

masiadamente reduzido, melhorando os dados obtidos. O grupo de ondas gravitacionais do INPE (GWINPE), liderado por Odylio Aguiar, está diretamente envolvido nesse projeto^{XIII}.

Desta forma, nesse último capítulo, foi possível compreender um pouco sobre os principais métodos de detecção de radiação gravitacional, com todo o seu histórico e modelos. Pudemos ver como a teoria de Einstein impactou também o ramo experimental da astrofísica moderna, tentando trazer a tona conceitos que pareciam até então um tanto distantes devido a complexidade de Teoria Geral da Relatividade.

Analizamos também um pouco da grandiosidade do projeto LIGO, os seus dados coletados na década passada, e como ele vem aprimorando esse ramo de pesquisa com novas medições todo ano. Por último, também conseguimos entender melhor o papel brasileiro nesse panorama, participando veementemente de um grande projeto internacional.

A seguir, apresentaremos as considerações finais dessa monografia de conclusão de curso.

^{XIII}Detalhes mais aprofundados sobre a estrutura do LIGO Voyager e de projetos como o *Cosmic Explorer* podem ser acessados em [43] e [44].

Considerações Finais

No decorrer deste trabalho, vimos como foi o desenrolar histórico que permeava o desenvolvimento da Teoria Geral da Relatividade. O desenvolvimento da Teoria da Relatividade Restrita, e, de forma mais crucial, a quebra com parâmetros da mecânica newtoniana, muito bem consolidada durante séculos, trouxeram a tona a necessidade de uma visão do espaço-tempo que englobasse todo e qualquer referencial. Com isso, Einstein formulou o princípio da equivalência, mudando para sempre a forma de como se observa a gravidade, e trouxe a tona a TGR. Pudemos compreender a complexidade dessa teoria, com elementos da geometria riemanniana e diferencial, para assim ficar claro como funciona a distorção do espaço-tempo que a gravidade causa entre corpos.

Além disto, vimos como resolvendo as equações de campo de Einstein, é possível se obter uma solução de onda na forma tensorial. A aproximação de campos gravitacionais fracos se mostrou como a principal ferramenta para isso, relacionando as métricas do espaço-tempo plano de Minkowski e do espaço-tempo curvo de Einstein e expondo o que este chamou de ondas gravitacionais. A perturbação na métrica, $h_{\mu\nu}$, quando substituída nas componentes do tensor de Ricci, nos apontou os graus de polarização possíveis para as ondas, mostrando como elas distorcem a matéria com a qual entram em contato.

Por fim, compreendemos também o contexto histórico por trás da detecção da radiação gravitacional. O primeiro detector, construído por Joseph Weber, apesar de ineficiente, deu largada a uma corrida rumo as detecções do LIGO, em 2015. A detecção das ondas gravitacionais no “tecido” denominado de espaço-tempo, concedeu aos cientistas Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne, o prêmio Nobel de Física de 2017, da colaboração científica do Observatório Interferométrico de Ondas Gravitacionais (LIGO), nos Estados Unidos. [45]. Este, inclusive, com sua estrutura e aparato colossais, como foi exposto, vêm sendo a principal ferramenta no estudo das ondas gravitacionais, reforçando a teoria de Einstein mais de 100 anos após sua publicação. No Brasil, projetos como os comandados por Odylio Aguiar do INPE [39], tornam nosso país protagonista desse no-

víssimo cenário na Ciência, usufruindo tanto de estudos para aprimorar o LIGO, quanto do uso do nosso próprio detector, Mário Schenberg.

Referências Bibliográficas

- [1] “Wikipedia, Albert Einstein.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [2] “Wikipedia, Stephen Hawking.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Stephen_Hawking. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [3] “Wikipedia, Neil deGrasse Tyson.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Neil_deGrasse_Tyson. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [4] G. A. F. Siqueira, “Ondas Gravitacionais: Uma Aplicação da Relatividade Geral,” 2016.
- [5] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [6] “Ligo: Official website.” Disponível em: <https://www.ligo.caltech.edu>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [7] “Gravitational waves, Einstein’s ripples in spacetime, spotted for first time.” Disponível em: <https://www.science.org/>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [8] D. Redação, “Adamantinense é colaborador do grupo que comprovou a existência de ondas gravitacionais no Universo.” Disponível em: <https://www.sigamais.com/>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [9] “Wikipedia, annus mirabilis.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Annus_mirabilis. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [10] A. Einstein, “Zur elektrodynamik bewegter körper,” *Annalen der Physik*, p. 891-921, 1905.
- [11] R. Gazzineli, *Teoria da Relatividade Especial*. Editora Blücher, 2009.

- [12] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [13] I. Newton, *Principia, Livro I: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. edusp, 2023.
- [14] “Wikipedia, Isaac Newton.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [15] “Wikipedia, Galileu Galilei.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Galileu_Galilei. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [16] “Wikipedia, Loránd Eötvös.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Loránd_Eötvös. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [17] “Wikipedia, Variedade.” Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Variedade_\(matemática\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Variedade_(matemática)). Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [18] A. Trautman, “Einstein-Cartan Theory,” *Encyclopedia of Mathematical Physics*. Oxford: Elsevier, vol. 2, pages 189–195, 2006.
- [19] “Wikipedia, Gregorio Ricci-Curbastro.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Gregorio_Ricci-Curbastro. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [20] I. P. Lobo, “Singularidades do espaço-tempo em variedades de Weyl,” 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/5740>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [21] “Wikipedia, Siméon Denis Poisson.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Siméon_Denis_Poisson. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [22] A. Einstein, “Die formale grundlage der relativitätstheorie,” *Sitzungsberichte* 41, pp. 1066-1077, 1914.
- [23] K. Riles, “Gravitational waves: Sources, detectors and searches,” *Progress in Particle and Nuclear Physics, Volume 68, Pages 1-54, published by Elsevier*, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2012.08.001>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [24] “Wikipedia, Jean le Rond d’Alembert.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d%27Alembert. Acessado em 18 de dezembro de 2024.

- [25] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [26] “Wikipedia, Equações de Maxwell.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/EquaÃ§Ãµes_de_Maxwell. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [27] O. Aguiar, *ASTROFÍSICA de ONDAS GRAVITACIONAIS*. LF Editorial, 2014. Disponível em: http://mtc-m21c.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m21c/2019/01.31.16.38/doc/10_Astrofisica%20de%20ondas%20Gravitacionais_2018.pdf. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [28] “Wikipedia, Russell Alan Hulse.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Russell_Alan_Hulse. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [29] “Wikipedia, Joseph Hooton Taylor.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph_Hooton_Taylor. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [30] D. O. Bradley Carroll, *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson Addison Wesley, 2007.
- [31] F. Pirani, “On the Physical significance of the Riemann tensor,” *Acta Phys. Pol.* 15, 389, 1956.
- [32] “Wikipedia, Joseph Weber.” Disponível em: <https://revistapesquisa.fapesp.br/deteccao-de-ondas-gravitacionais-e-premiada-pelo-nobel-de-fisica/> Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [33] J. Weber, “Detection and generation of gravitational waves,” *Physics Review* 117, p.360, 1960.
- [34] O. Aguiar and N. F. Oliveira Jr., “Contribuição da supercondutividade na detecção de ondas gravitacionais,” *Revista USP*, n^o92, p.167-175, 2011-2012. Disponível em: <https://revistas.usp.br/revusp/article/view/34960/37696>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [35] R. de Andrade Martins, “Em busca do éter: de maxwell a michelson, morley e miller.” Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7717957>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.

- [36] “Wikipedia, Mário Schenberg.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A1rio_Schenberg. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [37] F. da Silva Bortoli, *Sistemas Vibracionais do Detector de Ondas Gravitacionais Mário Schenberg*. PhD thesis, Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP), 2011.
- [38] S. Turano de Souza, *O detector de ondas gravitacionais Mário Schenberg: uma antena esférica criogênica com transdutores paramétricos de cavidade fechada*. PhD thesis, Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP), 2012.
- [39] O. Aguiar, “Astrofísica de ondas gravitacionais divisão de astrofísica, instituto nacional de pesquisas espaciais.” Disponível em: <https://www.gov.br/inpe/pt-br/area-conhecimento/posgraduacao/ast/workshop/repositorio-de-arquivos/2017/11odylio.pdf>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [40] B. P. A. et al., “Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence,” *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, *PRL 116*, 241103, 2016.
- [41] “Ligo detects another black hole crash.” Disponível em: <https://www.science.org/content/article/ligo-detects-another-black-hole-crash>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [42] “Ligo-virgo-kagra (lvk) collaboration detected a remarkable gravitational-wave signal.” Disponível em: <https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20240405>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [43] “Ligo voyager project of future gravitational wave detector.” Disponível em: <https://dcc.ligo.org/LIGO-G1602258/public>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [44] “Ligo voyager upgrade: Design concept.” Disponível em: <https://docs.ligo.org/voyager/voyagerwhitepaper/main.pdf>. Acessado em 18 de dezembro de 2024.
- [45] “Detecção de ondas gravitacionais é premiada com Nobel de Física.” Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%A3o_de_Maxwell. Acessado em 18 de dezembro de 2024.

Tensoros e Álgebra Tensorial

De exímia importância em áreas da física como a teoria da relatividade geral e a eletrodinâmica, a álgebra tensorial se apresenta como uma ferramenta imprescindível para o estudo de ondas gravitacionais. Neste apêndice, apresentaremos como o conceito de “tensor” surge a partir da generalização do que conhecemos como “vetores” e “escalares”, permitindo um estudo mais aprofundado da geometria do espaço-tempo sob uma visão não-euclidiana.

A.1 Escalares, Vetores e suas Bases

Até mesmo nos ensinamentos mais básicos de Física, é comum nos depararmos com os conceitos de escalares e vetores. As suas definições se baseiam na ideia de quantas “informações” são necessárias para definir de forma satisfatória uma certa grandeza física. Ou seja, grandezas como a energia “ E ” de um sistema, que podem ser definidas somente com um certo valor numérico, se apresentam como escalares:

$$E = k, k \in \mathcal{R} \quad (\text{A.1})$$

Enquanto outras grandezas, como a posição de uma partícula no espaço cartesiano, precisam ser definidas por mais de um valor, apresentando “módulo, direção, e sentido”. Nesses casos, um vetor \vec{P} pode ser definido como,

$$\vec{P} = P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}, \quad (\text{A.2})$$

sendo $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ os vetores da base canônica cartesiana. No entanto, por mais conveniente que seja o uso da base cartesiana, ela acaba por limitar o uso de um vetor, visto que ele só poderia ser representado por um espaço vetorial dentro da geometria euclidiana, com dimensões finitas. Portanto, é conveniente introduzir uma forma de vetor genérico P :

$$P = P^\mu \hat{e}_{(\mu)}, \quad (\text{A.3})$$

em que P^μ representa a componente μ do vetor, com $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$ e com $\hat{e}_{(\mu)}$ representando uma base genérica para a respectiva componente ^I. Consequentemente, temos que ^{II}:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_j^i. \quad (\text{A.4})$$

Com um vetor genérico bem definido, é possível a abordagem de grandezas dentro do contexto da métrica de Minkowski, com um espaço-tempo curvo e utilizando os quadrivetores dotados de uma componente temporal e três espaciais.

A.2 Vetores Contravariantes e Covariantes

Agora que nosso vetor pode ser representado em uma base $\hat{e}_{(\mu)}$, é possível definir que, para a mudança dessa base para outra base $\hat{e}_{(\nu)}$, as componentes P^μ podem ser escritas como:

$$P^\mu = a_{\mu\nu} P'^\nu, \quad (\text{A.5})$$

sendo $a_{\mu\nu}$ o elemento da matriz jacobiana^{III} correspondente, e P'^ν as componentes do vetor P em $\hat{e}_{(\nu)}$. Como resultado:

$$P^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} P'^\nu. \quad (\text{A.6})$$

Para x^μ e x'^ν sendo as coordenadas representadas em cada base. Dessa forma, a equação (A.5) define o conceito de vetor contravariante, sendo um vetor que muda de comportamento de maneira inversa a mudança de base. Esses vetores, na álgebra tensorial, são representados com índices sobrescritos, e no contexto da relatividade, pertencem a um espaço vetorial tangente a um ponto de uma curva no espaço-tempo.

Porém, se existem vetores que se transformam de maneira inversa a base, é possível também definir um grupo de vetores que se transformam de maneira proporcional a base. Esses são ditos vetores covariantes. Eles pertencem ao espaço cotangente a um ponto de uma curva no espaço-tempo, que traçam os mapas lineares de respectivos vetores contravariantes, os associando a uma determinada função escalar “ ϖ ”, tal que o seu valor seja

^INesse apêndice, como no restante da monografia, também será adotada a notação de Einstein, permitindo que os índices repetidos sejam sinônimo de soma sem o uso redundante do símbolo de somatória.

^{II}O símbolo δ_j^i representa a função Delta de Kronecker, em que $\delta_j^i=0$ se $i \neq j$ e $\delta_j^i = 1$ se $i = j$.

^{III}Matriz determinada pelo matemático alemão Carl Gustav Jakob Jacobi, formada pelas derivadas parciais de uma certa função vetorial, atuando mudando a base sob a qual esse mesmo vetor é representado.

“ k ”, com $k \in \mathcal{R}$. Como o comportamento desses vetores é inverso ao dos contravariantes, eles seguem a regra:

$$P_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} P'_\nu, \quad (\text{A.7})$$

sendo representados por índices subscritos. É possível observarmos que, enquanto $a_{\mu\nu} = \partial x^\mu / \partial x'^\nu$, $\partial x'^\nu / \partial x^\mu = a^{\mu\nu}$. Ou seja, a matriz de transformação de um vetor covariante P_μ é a inversa de um respectivo vetor contravariante, de forma que P_μ seja a componente do gradiente de uma determinada função escalar ϖ que muda para uma outra coordenada ϖ' :

$$P_\mu = \frac{\partial \varpi'}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varpi}{\partial x'^\nu}. \quad (\text{A.8})$$

A.3 Definindo Tensores de Ordem Superior

Conforme demonstrado, a definição de vetores contravariantes e covariantes segundo as equações (A.6), (A.7) e (A.8) relaciona vetores, matrizes e escalares. É relacionando essas diferentes entidades geométricas que surge a necessidade de uni-las sobre uma conveniente generalização: o tensor.

Em outras palavras, a maneira de se organizar informações sobre certa grandeza se apresenta sob uma única e mais simples definição.

- Escalares, por exemplo, nada mais são do que tensores de ordem zero, sendo invariantes mediante transformações de coordenadas, e são representados por uma matriz de ordem 1 (de elemento único).
- Quanto aos vetores, estes se caracterizam como tensores de primeira ordem, representados por uma matriz linha ou uma matriz coluna, sendo um “agrupamento” de tensores de ordem zero (escalares).

Mais especificamente, no contexto da Relatividade Geral, os tensores de primeira ordem são matrizes linha ou coluna com 4 elementos. Por esse mesmo motivo, eles também são chamados de quadrivetores.

Seguindo o raciocínio, tensores de segunda ordem seriam “combinações” de dois vetores. A sua representação geométrica seria a de uma matriz quadrada de ordem igual ao número de componentes dos vetores combinados. Contudo, esses vetores podem diferir entre si quanto a sua variância, conforme apresentado anteriormente. Dessa forma, é definido um tensor de segunda ordem contravariante expresso como,

$$P^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} P'^{\rho\sigma}. \quad (\text{A.9})$$

Sendo esse a junção de dois vetores contravariantes.

De forma análoga, um tensor de segunda ordem covariante pode ser definido como,

$$P_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} P'_{\rho\sigma}. \quad (\text{A.10})$$

Compondo dois vetores covariantes combinados.

Além disso, um tensor de segunda ordem é dito misto quando transforma as suas componentes como o produto de um vetor covariante e um contravariante,

$$P^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} P'^{\rho}_{\sigma}. \quad (\text{A.11})$$

A.4 Operações com Tensores

Com o intuito de entender o procedimento de manipulação de tensores da análise tensorial, se faz necessário o estudo das possíveis operações envolvendo tensores.

A.4.1 Adição e Subtração

A adição e a subtração tensorial se dá de maneira similar a de vetores e matrizes. Os tensores tem cada uma de suas componentes individuais somadas ou subtraídas:

$$P_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}. \quad (\text{A.12})$$

Diante o exposto, fica claro a necessidade dos tensores envolvidos compartilharem a mesma ordem e estarem expressos em espaços equidimensionais. O tensor resultante também, por consequência, compartilha dessas mesmas propriedades.

A.4.2 Simetria

Como uma entidade geométrica, tensores também podem apresentar graus de simetria. É dito um tensor simétrico aquele que, ao ter os seus índices trocados, mantém-se inalterado,

$$P^{\mu\nu} = P^{\nu\mu}. \quad (\text{A.13})$$

Concomitantemente, é dito tensor antissimétrico aquele, ao ter os seus índices trocados, se torna o seu tensor oposto,

$$P^{\mu\nu} = -P^{\nu\mu}. \quad (\text{A.14})$$

Inclusive, todo tensor pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico e um antissimétrico, além de que o produto de um pelo outro é geralmente nulo.

A.4.3 Contração de Índice e Produto Interno

Ademais, é importante salientar o caso quando dois índices iguais ocorrem em um mesmo tensor de ordem superior, visto que se trata de uma manipulação recorrente na TRG. Se estes tiverem variância oposta, ou seja, um é contravariante e outro covariante, ocorre o caso de contração de um tensor. Seja o tensor P misto e de terceira ordem, com dois índices iguais:

$$\begin{aligned} P^{\mu \nu}_{\mu} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} P'^{\rho \kappa}_{\sigma} \\ P^{\mu \nu}_{\mu} &= \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} P'^{\rho \kappa}_{\sigma} \\ P^{\mu \nu}_{\mu} &= \delta^{\sigma}_{\rho} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} P'^{\rho \kappa}_{\sigma} \end{aligned}$$

Pela propriedade da delta de Kronecker, $\rho = \sigma$, para P não nulo. Dessa forma,

$$P^{\mu \nu}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} P'^{\rho \kappa}_{\rho}. \quad (\text{A.15})$$

Sendo a equação (A.15) um tensor de primeira ordem, segundo o que foi anteriormente apresentado. Isto é, a contração tensorial diminui a ordem do tensor em duas,

$$H^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} H'^{\kappa}. \quad (\text{A.16})$$

A.4.4 Produto Direto

Outra operação relevante é o produto direto entre tensores. Sejam P e H dois tensores de primeira ordem, ambos contravariantes, o seu produto interno ocorre da forma,

$$P^{\mu} H^{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} P'^{\rho} H'^{\sigma}. \quad (\text{A.17})$$

O que configura, conforme pode se observar, um novo tensor de segunda ordem,

$$L^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} L'^{\rho\sigma}. \quad (\text{A.18})$$

O mesmo vem a ocorrer independente da variância dos tensores. Consequentemente, infere-se que o produto interno de dois tensores resulta em um terceiro de tensor, com a sua ordem igual a soma dos dois multiplicados.

A.4.5 Tensor Métrico, Abaixamento e Levantamento de Índices

No âmbito da álgebra tensorial, é possível definirmos um tensor responsável por “organizar” as medidas em um determinado espaço n -dimensional, definindo como os demais tensores se relacionam entre si. Esse tensor é chamado de Tensor Métrico.

No contexto da Relatividade Especial, esse tensor define a métrica do espaço quadridimensional de Minkowski, de modo que a distância infinitesimal entre dois pontos nesse espaço seja um invariante, da forma,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.19})$$

em que ds representa o intervalo invariante, $\eta_{\mu\nu}$ a componente do tensor métrico e dx uma possível componente do espaço-tempo quadridimensional. Nessa monografia, a forma escolhida para o tensor métrico foi a seguinte^{IV},

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Apesar de $\eta_{\mu\nu}$ tratar de um espaço-tempo da Relatividade Especial, ele também é de grande importância na Teoria Geral da Relatividade, conforme pode ser averiguado na aproximação de campos gravitacionais fracos. Nesta aproximação, trataremos de um espaço-tempo quadridimensional curvo, diferente da versão plana de Minkowski. O tensor métrico para esse novo espaço-tempo será abordado como $g_{\mu\nu}$, e se relacionará com $\eta_{\mu\nu}$ localmente, se assemelhando ao somarmos um termo de perturbação $h_{\mu\nu}$.

Como tensores métricos definem a métrica de um espaço, eles também são responsáveis por relacionar tensores contravariantes e covariantes. Tal relação é dada a partir da operação de abaixamento e levantamento de índices. Seja T^ν um tensor contravariante de primeira ordem em um determinado espaço. Ao fazermos o produto interno dele pelo tensor métrico desse espaço, $a_{\mu\nu}$, nos deparamos com um caso de contração,

$$a_{\mu\nu} T^\nu = U_{\mu\nu}{}^\nu = U_\mu. \quad (\text{A.21})$$

Sendo assim, um tensor contravariante de primeira ordem, se torna um tensor covariante com a mesma ordem. Essa operação é conhecida como

^{IV}Na literatura, esse tensor varia alguns sinais de suas componentes dependendo do autor. Para saber mais sobre, sugerimos a referência [Carroll]

abaixamento de índice, ocorrendo ao multiplicarmos um tensor contravariante pela componente do tensor métrico covariante.

À vista disso, a operação de levantamento de índice ocorre de maneira inversa, com o produto de um tensor covariante pela componente contravariante do tensor métrico. Seja, portanto, T_ν esse tensor:

$$a^{\mu\nu}T_\nu = U^{\mu\nu}{}_\nu = U^\mu. \quad (\text{A.22})$$

Resultando em um tensor contravariante U^μ . Além disso:

$$a^{\mu\nu}a_{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (\text{A.23})$$

A.4.5.1 Derivação

Seja ∂_μ o operador nabla (∇) em um espaço n-dimensional:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}, \dots \right), \quad (\text{A.24})$$

ele se comporta como um pseudo-vetor covariante, de modo que o gradiente de qualquer campo escalar ϖ seja um vetor covariante,

$$\partial_\mu \varpi = V_\mu. \quad (\text{A.25})$$

Isto é, a derivação parcial de um tensor de ordem zero o transforma em um tensor de ordem um. Desta forma, é possível concluir que esse processo, para um tensor qualquer, aumenta a sua ordem em uma unidade.

No entanto, esse processo de derivação não apresenta tal simplicidade quando abordado em um espaço curvo, visto que os vetores da base, nesse caso, não se mantêm constantes. Seja P_μ um tensor de primeira ordem (vetor) covariante. Ao derivá-lo parcialmente em função de x^ν , têm-se,

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} P'_\rho \\ \frac{\partial P_\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} P'_\rho \right) \\ \frac{\partial P_\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \frac{\partial P'_\rho}{\partial x^\eta} + \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\mu} P'_\rho \\ \frac{\partial P_\mu}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\nu} \frac{\partial P'_\rho}{\partial x^\eta} + \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\mu} P'_\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

De forma que o primeiro termo a direita da equação (A.26) caracteriza a formação de um tensor de segunda ordem, e o segundo termo a variação

dos vetores da base ponto a ponto, provando que a derivação comum no espaço curvo traz um termo a mais quando comparada a derivação no espaço plano.

Dado o exposto, se faz necessário um processo de derivação que leve em conta também a variação dos vetores da base. Esse processo é conhecido como derivada covariante. Ele leva conta que o diferencial de um vetor P_μ em um espaço curvo, seria a diferença entre a variação do próprio vetor entre dois pontos (dP^μ) e a variação causada pelos vetores da base (δP_μ),

$$DP_\mu = dP^\mu - \delta P_\mu. \quad (\text{A.27})$$

De modo que δP_μ é dado por,

$$\delta P_\mu = -\Gamma^\rho_{\mu\nu} P_\rho dx^\nu, \quad (\text{A.28})$$

com $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ sendo o símbolo de Christoffel de segunda ordem.

Por conseguinte, a equação (A.27) fica escrita como,

$$DP_\mu = dP^\mu - \delta P_\mu = \frac{\partial P^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \Gamma^\rho_{\mu\nu} P_\rho dx^\nu; \quad (\text{A.29})$$

e sua derivada em relação a x^ν ,

$$\frac{DP_\mu}{Dx^\nu} = P_{\mu,\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} P_\rho. \quad (\text{A.30})$$

A notação a esquerda na equação (A.30) também pode ser usada como $P_{\mu;\nu}$ e caracteriza a derivada covariante.